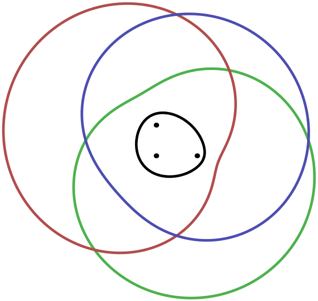
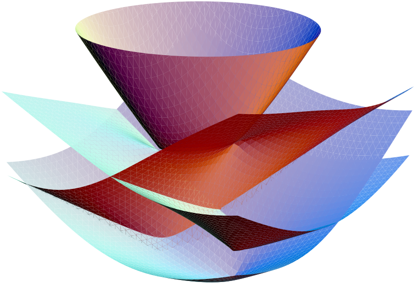
Zur Quadratischen Gleichung

Bernd Sturmfels
MPI Leipzig





Eine Einladung in die Nicht-lineare Algebra

Felix-Hausdorff Vorlesung, Greifswald, 23.1.2018

In der neunten Klasse

Die quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Die Variable x ist die Unbekannte.

Die drei Größen a, b, c sind Parameter. In Anwendungen sind dies z.B. Meßwerte eines Experiments. Sie können sich häufig ändern.

In der neunten Klasse

Die quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad 0.$$

Die Variable x ist die Unbekannte.

Die drei Größen a, b, c sind Parameter. In Anwendungen sind dies z.B. Meßwerte eines Experiments. Sie können sich häufig ändern.

Wie lösen wir diese Gleichung?

In der neunten Klasse

Die quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad 0.$$

Die Variable x ist die Unbekannte.

Die drei Größen a, b, c sind Parameter. In Anwendungen sind dies z.B. Meßwerte eines Experiments. Sie können sich häufig ändern.

Wie lösen wir diese Gleichung?

Der Lehrer leitet eine allgemeine Formel her.
Die Schüler lernen diese Formel dann auswendig.

In der neunten Klasse

Die quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad 0.$$

Die Variable x ist die Unbekannte.

Die drei Größen a, b, c sind Parameter. In Anwendungen sind dies z.B. Meßwerte eines Experiments. Sie können sich häufig ändern.

Wie lösen wir diese Gleichung?

Der Lehrer leitet eine allgemeine Formel her.
Die Schüler lernen diese Formel dann auswendig.

Warum lösen wir diese Gleichung?

In der neunten Klasse

Die quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad 0.$$

Die Variable x ist die Unbekannte.

Die drei Größen a, b, c sind Parameter. In Anwendungen sind dies z.B. Meßwerte eines Experiments. Sie können sich häufig ändern.

Wie lösen wir diese Gleichung?

Der Lehrer leitet eine allgemeine Formel her.
Die Schüler lernen diese Formel dann auswendig.

Warum lösen wir diese Gleichung?

Keine Ahnung.
Es steht so im Lehrplan.

Mathe is total langweilig....

Die Formel

Eine quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Lösungen, nämlich

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Formel

Eine quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Lösungen, nämlich

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die *Diskriminante* ist der Ausdruck

$$D = b^2 - 4ac$$

Für die Natur der Lösung gibt es eine Fallunterscheidung:

$$D > 0 \quad \textit{oder} \quad D = 0 \quad \textit{oder} \quad D < 0.$$

Die Formel

Eine quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Lösungen, nämlich

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die *Diskriminante* ist der Ausdruck

$$D = b^2 - 4ac$$

Für die Natur der Lösung gibt es eine Fallunterscheidung:

$$D > 0 \quad \textit{oder} \quad D = 0 \quad \textit{oder} \quad D < 0.$$

Es gibt fast immer zwei komplexe Lösungen. Reell sind davon

`Zwei` *oder* `eine` *oder* `null`.

Das Quadrat vervollständigen

Herleitung: Die folgenden Gleichungen sind alle äquivalent:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
ax^2 + bx &= -c \\
ax^2 + bx + \tfrac{b^2}{4a} &= \tfrac{b^2}{4a} - c \\
a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2-4ac}{4a} \\
\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \tfrac{b^2-4ac}{4a^2} \\
x + \tfrac{b}{2a} &= \tfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= -\tfrac{b}{2a} + \tfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Das Quadrat vervollständigen

Herleitung: Die folgenden Gleichungen sind alle äquivalent:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
ax^2 + bx &= -c \\
ax^2 + bx + \tfrac{b^2}{4a} &= \tfrac{b^2}{4a} - c \\
a\,(x + \tfrac{b}{2a})^2 &= \tfrac{b^2-4ac}{4a} \\
(x + \tfrac{b}{2a})^2 &= \tfrac{b^2-4ac}{4a^2} \\
x + \tfrac{b}{2a} &= \tfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= -\tfrac{b}{2a} + \tfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Was macht man mit Polynomen in x von höherem Grad?

Numerische Lösung, symbolische Darstellung der Wurzeln, ...

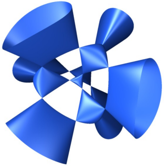
Was macht man mit Polynomen in mehreren Variablen?

Gröbner-Basen, Resultanten, Diskriminanten, Bilder malen ....

Was ist eigentlich Mathematik?

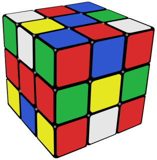
Die Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.

Galileo Galilei



Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.

Jean-Jacques Rousseau



Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald etwas anderes.

Johann Wolfgang von Goethe

Mathe ist Elegant

Mathematik beinhaltet nicht nur Wahrheit,
sondern auch allerhöchste Schönheit. Bertrand Russell

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1 = 0$

Oliver Labs: `surfex.AlgebraicSurface.net`

Nina's Modenschau

[Jiawang Nie, Kristian Ranestad, B. St: *The algebraic degree of semidefinite programming*, Math Progr. (2010)]

.... und Nützlich

SCIENTIFIC AMERICAN™

New Mathematics Could Neutralize Pathogens That Resist Antibiotics

A “time machine” algorithm, backed by experimental data, reveals how to cycle drugs to reverse resistance

By Sarah Lewin | May 26, 2015

Bacteria that make us sick are bad enough, but many of them also continually evolve in ways that help them develop resistance to common antibiotic drugs, making our medications less effective or even moot. Doctors try to reduce the evolution by cycling through various drugs over time, hoping that as resistance develops to one, the increased use of a new drug or the widespread reuse of an old drug will catch some of the bugs off guard.

A new algorithm that deciphers how bacteria genes gain resistance to antibiotics could help improve drug cycling regimes.

Credit: NIAID / Flickr

More on this Topic

Tomorrow's Medicine

The plans for cycling drugs are not that scientific, however, and don’t always work efficiently, allowing bacteria to continue to develop resistance. Now a new algorithm that deciphers how bacteria genes create resistance in the first place could greatly improve such a plan. The “time machine” software, developed by biologists and mathematicians, could help reverse resistant mutations and render the bacteria vulnerable to drugs again.

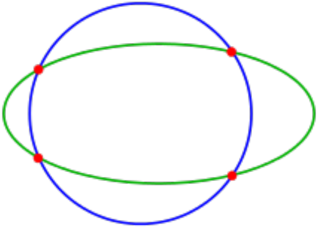
Varietäten

Die Lösungsmenge eines polynomialen Gleichungssystems in n Variablen nennt man eine *Varietät* im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Quadratische Kurven in der Ebene ($n = 2$):

$$a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f \quad = \quad 0.$$

Zwei quadratische Gleichungen in x und y ...



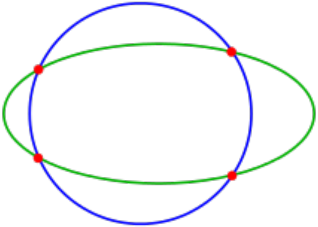
Varietäten

Die Lösungsmenge eines polynomialen Gleichungssystems in n Variablen nennt man eine *Varietät* im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Quadratische Kurven in der Ebene ($n = 2$):

$$a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f \quad = \quad 0.$$

Zwei quadratische Gleichungen in x und y ...



... haben fast immer vier komplexe Lösungen. [Bézout 1764]

Die Diskriminante ist ein großes Polynom in den Koeffizienten. Sie gibt die Fallunderscheidung: 0,1,2,3 oder 4 reelle Lösungen.

Statistik

Zuviel Fußball im Fernsehen führt zu Haarausfall?

Eine Studie befragt 296 Teilnehmer nach ihrer Haardichte und wieviele Stunden pro Woche sie Fußball anschauen. Die Daten:

$$U = \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{volle Haare} & \text{mittel} & \text{wenig Haare} \end{array} \\ \begin{array}{r} \leq 2 \text{ Stunden} \\ \text{2–6 Stunden} \\ \geq 6 \text{ Stunden} \end{array} & \begin{pmatrix} 51 & 45 & 33 \\ 28 & 30 & 29 \\ 15 & 27 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gibt es eine Korrelation? Eine kausale Beziehung?

Statistik

Zuviel Fußball im Fernsehen führt zu Haarausfall?

Eine Studie befragt 296 Teilnehmer nach ihrer Haardichte und wieviele Stunden pro Woche sie Fußball anschauen. Die Daten:

$$U = \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{volle Haare} & \text{mittel} & \text{wenig Haare} \end{array} \\ \begin{array}{r} \leq 2 \text{ Stunden} \\ 2\text{–}6 \text{ Stunden} \\ \geq 6 \text{ Stunden} \end{array} & \begin{pmatrix} 51 & 45 & 33 \\ 28 & 30 & 29 \\ 15 & 27 & 38 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gibt es eine Korrelation? Eine kausale Beziehung?

Zusatz-Info: Unsere Studie hatte 126 Männer and 170 Frauen:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 4 & 12 & 20 \\ 7 & 21 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 & 36 & 18 \\ 24 & 18 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir können die **Nullhypothese** nicht zurückweisen:

Haardichte ist unabhängig von TV-Fußball gegeben Geschlecht.

Algebraische Statistik

Philosophie: Statistische Modelle sind Varietäten.

Bedingte Unabhängigkeit von zwei ternären Zufallsvariablen:

Dies ist eine Hyperfläche im Grad 3 im $\mathbb{R}^9$:

$$\det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad = \quad 0.$$

Für gegebene Daten-Matrix (u_{ij}) maximiert man die Likelihood-Funktion $p_{11}^{u_{11}} p_{12}^{u_{12}} \cdots p_{33}^{u_{33}}$ über dieses Modell.

Algebraische Statistik

Philosophie: Statistische Modelle sind Varietäten.

Bedingte Unabhängigkeit von zwei ternären Zufallsvariablen:

Dies ist eine Hyperfläche im Grad 3 im $\mathbb{R}^9$:

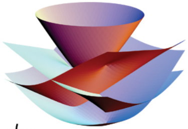
$$\det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad = \quad 0.$$

Für gegebene Daten-Matrix (u_{ij}) maximiert man die Likelihood-Funktion $p_{11}^{u_{11}} p_{12}^{u_{12}} \cdots p_{33}^{u_{33}}$ über dieses Modell.

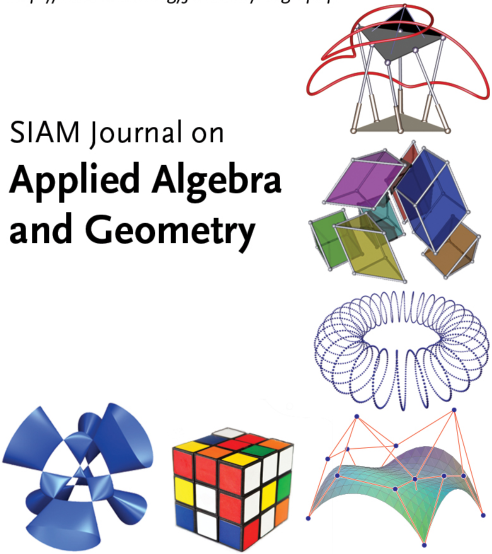
Dies führt auf ein polynomiales Gleichungssystem. Es hat fast immer 10 komplexe Lösungen. Die Diskriminante ist ein großes Polynom in $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{33}$. Sie definiert die Fallunterscheidung.

[J. Hauenstein, J. Rodriguez, B. St: *Maximum likelihood for matrices with rank constraints*, J. Alg. Stat (2014)]
[J. Rodriguez, X. Tang: *Data discriminants of likelihood equations*, ISSAC 2015]

Zeitschrift

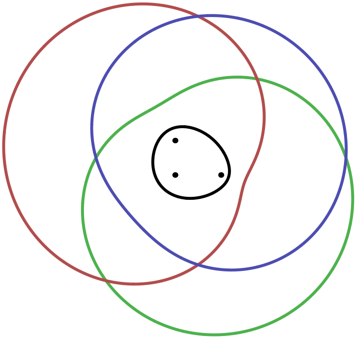


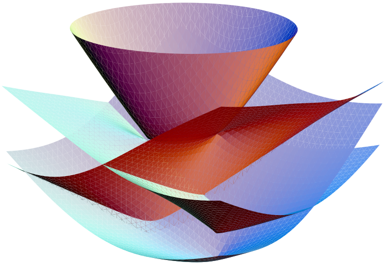
http://www.siam.org/journals/siaga.php



Die 3-Ellipse

Was war denn has Bild auf der Titelseite?





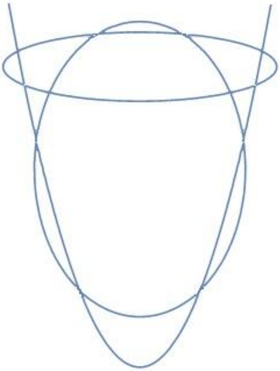
Diese **Varietät** ist eine Kurve vom Grad 8.
Wenn der Radius variiert bekommt man eine Fläche vom Grad 8.

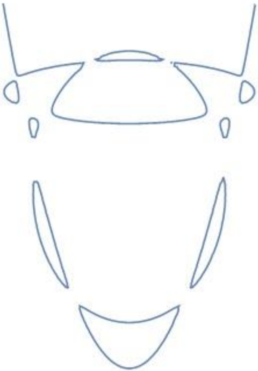
Diskriminante? Fallunterscheidung?

[J. Nie, P. Parrilo and B. Stu: Semidefinite representation of the k-ellipse, 2008]

Umzug nach Leipzig

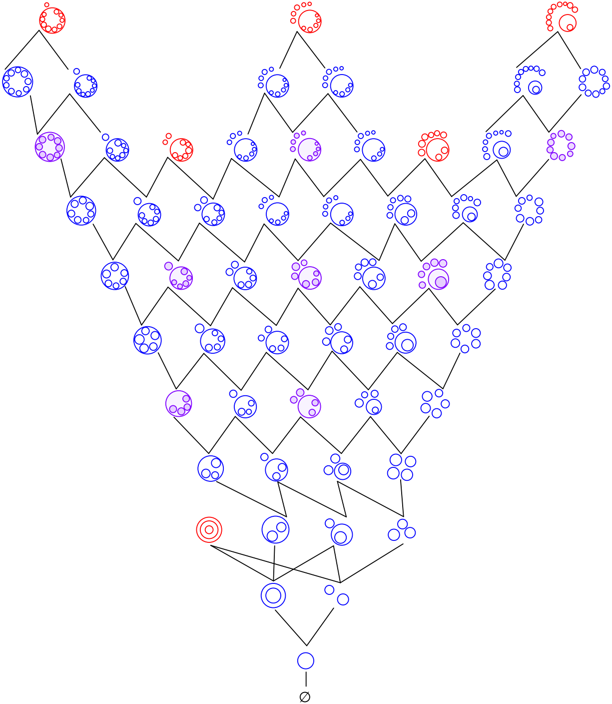
Eine neuere Arbeit mit Nidhi Kaihnsa, Mario Kummer, Daniel Plaumann and Mahsa Sayyary klassifiziert Kurven vom Grad 6:





Eine grosse Diskriminante leistet eine grosse Fallunterscheidung.

Kurven



Hilbert's 16th Problem (1900)

Classify all algebraic curves of degree six in the plane $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Theorem (Rokhlin-Nikulin Classification, 1980)

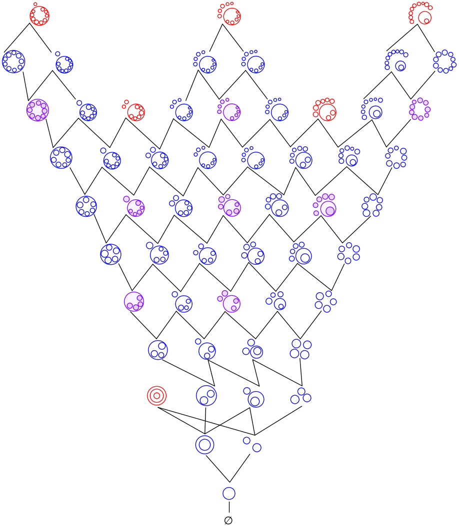
The discriminant Δ of plane sextics is a hypersurface of degree 75 in $\mathbb{P}^{27}_{\mathbb{R}}$. Its complement has 64 connected components. The 64 rigid isotopy types are grouped into 56 topological types, with number of ovals ranging from 0 to 11. The distribution equals

# ovals	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	all
Rigid isotopy	1	1	2	4	4	7	6	10	8	12	6	3	64
Topological	1	1	2	4	4	5	6	7	8	9	6	3	56

The 56 types are seen in our diagram.

[N.Kaihnsa, M.Kummer, D.Plaumann, M.Sayyary, BSt: Sixty-four curves of degree six, *Experimental Math*, 2018]

Blue, Red, Purple



Corollary

Of the 56 *topological types of smooth plane sextics,* 42 *types are non-dividing, six are dividing, and eight can be dividing or non-dividing. This accounts for all* 64 *rigid isotopy types in* $\mathbb{P}^{27}_{\mathbb{R}} \backslash \Delta$.

Discriminant

We evaluate Δ as the determinant of a 45×45-matrix.

[Gelfand-Kapranov-Zelevinsky 1994]

Each entry in the first 30 columns is either 0 or one of the c_{ijk}. The last 15 columns contain cubics in the c_{ijk}. The matrix is

$$(\,\mathbb{R}[x,y,z]_3\,)^3 \oplus \mathbb{R}[x,y,z]_4 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}[x,y,z]_8$$

On the first summand, it maps a triple of cubics to an octic:

$$(a,b,c) \mapsto a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}.$$

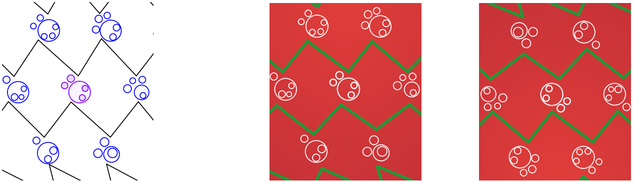
On the second summand, it maps a quartic monomial $x^r y^s z^t$ to the octic $\det(M_{rst})$, where M_{rst} is any 3×3-matrix of ternary forms satisfying

$$\begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \;=\; M_{rst} \cdot \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ y^{s+1} \\ z^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Proposition

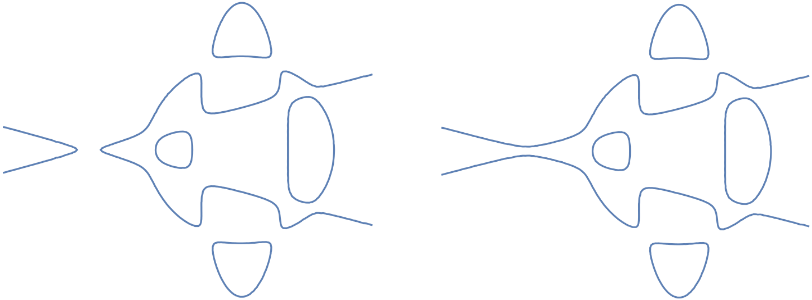
The discriminant Δ is the determinant of this $45{\times}45$-matrix.

Transitions



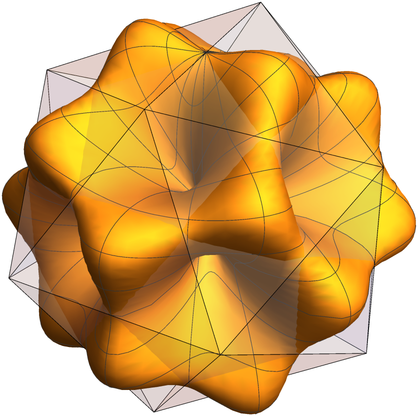
Theorem

For curves of even degree, every discriminantal transition between rigid isotopy types is one of the following: shrinking an ovals, fusing two ovals, and turning an oval inside out.



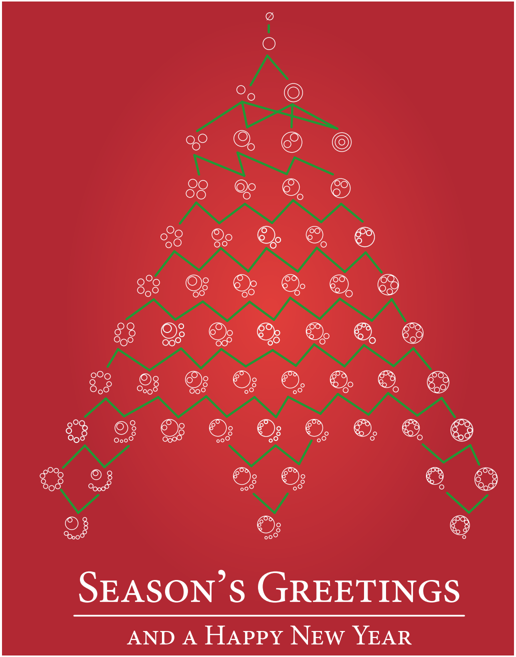
Optimization, Tensors, ...

A sextic can have up to 20 local maxima on the unit sphere. *The critical points are the eigenvectors*. This one has 62 critical points. Its Morse complex is the icosahedron, with f-vector $(12, 30, 20)$:



The **eigendiscriminant** has degree 150 in the 28 unknown coefficients.

Nicht nur zur Weihnachtszeit



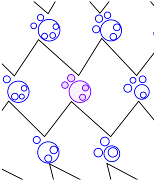
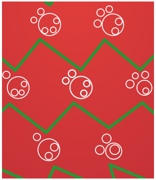
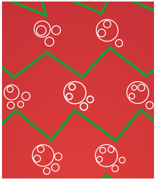
Fazit

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat zwei Lösungen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die *Diskriminante* ist der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$.
Für die Natur der Lösung gibt es eine Fallunterscheidung:

$$D > 0 \quad \textit{oder} \quad D = 0 \quad \textit{oder} \quad D < 0.$$

Die Diskriminanten D und Δ sind kleiner und großer Bruder.