Mit Quanten würfeln

Warum die Quantenphysik einen „radikaleren“ Zufall benötigt, als die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie ihn liefert

Projektbericht

In der Mathematik werden Zufallsexperimente durch Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen beschrieben. Zufallsvariablen sind Funktionen, die Elementen des Wahrscheinlichkeitsraumes die möglichen Ergebnisse des Experiments als Werte zuordnen. Ein sogenanntes Wahrscheinlichkeitsmaß gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, mit der die jeweiligen Werte auftreten. Hinter dieser Beschreibung des Zufalls steht die Idee, dass der Zufall aus unserer Unkenntnis resultiert. Wenn wir den Zustand des betrachteten Systems genau kennen würden, dann wüssten wir, welches Element des Wahrscheinlichkeitsraumes realisiert ist und wir könnten alle Ergebnisse des Experiments im voraus berechnen.

In der Quantenphysik ist der Zufall von fundamentalerer Natur. Es können Korrelationen auftreten, die für klassische Zufallsvariablen auf Wahrscheinlichkeitsräumen nicht möglich sind. Wie ich auch in meiner Fellow-Lecture erklärt habe, lässt sich der Zufall in der Quantenphysik nicht alleine als Folge von ungenauer Kenntnis des Zustandes des betrachteten Systems interpretieren. Man kann den Zufallsgrößen keine Werte zuordnen, ohne zuerst auszuwählen, welche Messungen durchgeführt werden sollen. Dies führt zur Quanten-Wahrscheinlichkeitstheorie oder Quantenstochastik, in der Zufallsgrößen durch Operatoren auf Hilberträumen oder – noch allgemeiner – durch Elemente von nicht-kommutativen Algebren beschrieben werden.

In meinem Projekt habe ich Lévy-Prozesse im Rahmen der Quantenstochastik untersucht. Diese Prozesse sind die quantenstochastische Verallgemeinerung von stochastischen Prozessen mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Lévy-Prozesse spielen eine wichtige Rolle in Modellen von Zufallsexperimenten sowohl in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie als auch in der Quantenstochastik. Sie haben zahlreiche Anwendungen in der Finanz- und Versicherungsmathematik, (Quanten-)Physik, und auch allen anderen Naturwissenschaften.

In der klassischen Wahrscheinlichkeit sind die Lévy-Prozesse genau die stochastischen Prozesse, die in Raum und Zeit stationär sind. Mit Fabio Cipriani und Anna Kula habe ich vor Kurzem gezeigt, dass diese Charakterisierung auch in der Quantenstochastik für Lévy-Prozesse auf Quantengruppen gilt.

Klassifizierung von Lévy-Prozessen

Eine wichtiges Ziel meines Projektes war die Klassifizierung von Quanten-Lévy-Prozessen.

Professor Dr. Uwe Franz
war von April bis September 2014 Alfried Krupp Senior Fellow. Er ist Professor für Mathematik an der Université de Franche-Comté in Besançon.

Kurzvita

Professor Dr. Uwe Franz (*1966) studierte Mathematik und Physik in Clausthal, Carbondale (USA) und Nakajo (Japan).
Nach seiner Promotion 1997 in Mathematik an der Université Henri Poincaré in Nancy war er als wissenschaftlicher Assistent an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald tätig, wo er 2004 habilitierte. Seit 2005 ist er Professor an der Université de Franche-Comté in Besançon. Seine Forschungsschwerpunkte umfassen quantenstochastische Prozesse, insbesondere quantenstochastische Prozesse mit stationären und unabhängigen Zuwächsen (Lévy-Prozesse), Quanten-Computer sowie die Quanten-Kommunikation.

Fellow-Projekt

» Quanten-Lévy-Prozesse und ihre Anwendungen in der Quantendynamik und der nicht-kommutativen Geometrie

Stochastische Prozesses mit unabhängigen und stationären Zuwächsen werden als Lévy-Prozesse bezeichnet. Wichtige Beispiele von Lévy-Prozessen sind die Brownsche Bewegung und der Poisson-Prozess. Diese Prozesse spielen in der stochastischen Modellierung eine fundamentale Rolle, sie werden z. B. in der Physik, der Biologie, und der Finanz- und Versicherungsmathematik verwendet.
Die Quanten-Stochastik ist eine Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sich durch die mathematische Struktur der Quantenphysik motiviert.

Mein Projekt befasst sich mit Quanten-Lévy-Prozessen, d.h. mit stochastischen Prozesses mit unabhängigen und stationären Zuwächsen im Rahmen der Quanten-Stochastik.

Ziel des Vorhabens war es, aktuelle Fragen dieses Forschungsgebietes zu untersuchen, um ein besseres Verständnis dieser Prozesse zu erreichen und neue Anwendungen in der Quantendynamik und der nicht-kommutativen Geometrie zu entwickeln.

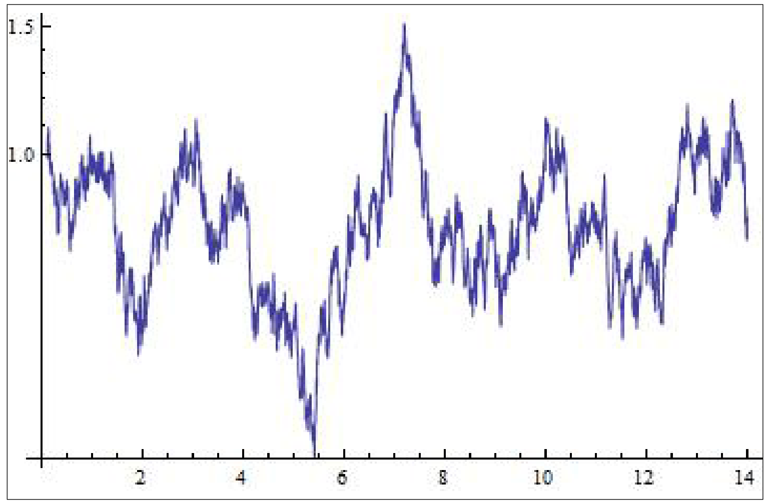

Abb. 1: 1-dim. Brownsche Bewegung (als Funktion der Zeit)

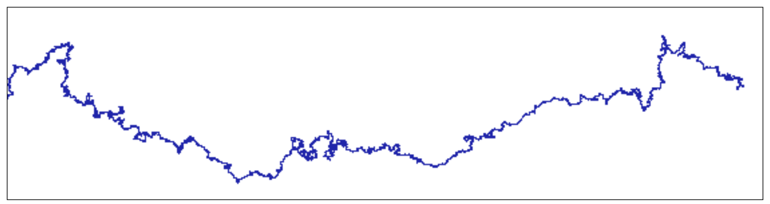

Abb. 2: 2-dim. Brownsche Bewegung

Klassische Lévy-Prozesse in euklidischen Räumen oder Lieschen Gruppen werden durch die Lévy-Khintchin-Formel bzw. durch die Huntsche Formel klassifiziert. Diese Formeln zeigen, dass man sich Lévy-Prozesse aus zwei Bausteinen zusammengesetzt vorstellen kann: einem stetigen Anteil, auch Gauss-Anteil genannt, der sich wie eine Brownsche Bewegung verhält, und einem Sprung-Anteil, der sich wie ein Poisson-Prozess verhält. Diese Zerlegung der Prozesse wird auch als Lévy-Itô-Zerlegung bezeichnet.

Vor ca. 25 Jahren hat Michael Schürmann die Frage untersucht, ob Quanten-Lévy-Prozesse auch eine solche Zerlegung zulassen. Da Quanten-Lévy-Prozesse durch sogenannte Schürmann-Tripel klassifiziert werden können, ist eine solche Zerlegung der Prozesse äquivalent zu einer Zerlegung der Tripel,

$$(\pi, \eta, \psi) = (\pi_G, \eta_G, \psi_G) \oplus (\pi_R, \eta_R, \psi_R),$$

wobei (π_G, η_G, ψ_G) ein Gaußsches Tripel sei und (π_R, η_R, ψ_R) ein Tripel, das keinen Gaußschen Anteil mehr enthält.
Michael Schürmann hat mehrere hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Zerlegung gefunden. Insbesondere hat er bewiesen, dass die Zerlegung auf bestimmten Algebren immer möglich ist.
Gemeinsam mit Malte Gerhold und Andreas Thom haben wir diese Frage weitergehend analysiert. Wir sagen, dass eine Algebra A die Eigenschaft (LK) hat, wenn alle Tripel auf dieser Algebra eine solche Zerlegung zulassen. Zusätzlich zu den von Schürmann eingeführten kohomologischen Eigenschaften (AC) und (GC) haben wir eine weitere Eigenschaft (NC) mit einbezogen. Wir haben gezeigt, dass die Umkehrungen der Implikationen

$$\begin{tikzcd}
 & H_2(A, \mathbb{C}) = 0 \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & (\mathrm{AC}) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathrm{GC}) \arrow[dr, Rightarrow] & & (\mathrm{NC}) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & (\mathrm{LK}) &
\end{tikzcd}$$

alle falsch sind. Wir haben auch Beispiele von Tripeln gefunden, die keine solche Zerlegung zulassen. Damit haben wir bewiesen, dass die klassische „Lévy-Khintchin"-Zerlegung von Tripeln sich nicht ohne Einschränkung auf die Quantenstochastik verallgemeinern lässt.
Mit Biswarup Das, Anna Kula und Adam Skalski haben wir allerdings bewiesen, dass die Zerlegung für Tripel, die eine bestimmte Symmetrie-Bedingung erfüllen, immer möglich ist. Und mit Anna Kula, Michael Skeide und Martin Lindsay haben wir die Tripel auf den kompakten Quantengruppen $SU_q(N)$ und $U_q(N)$ klassifiziert und dabei gezeigt, dass die Zerlegung für Tripel auf diesen Algebren auch immer möglich ist.

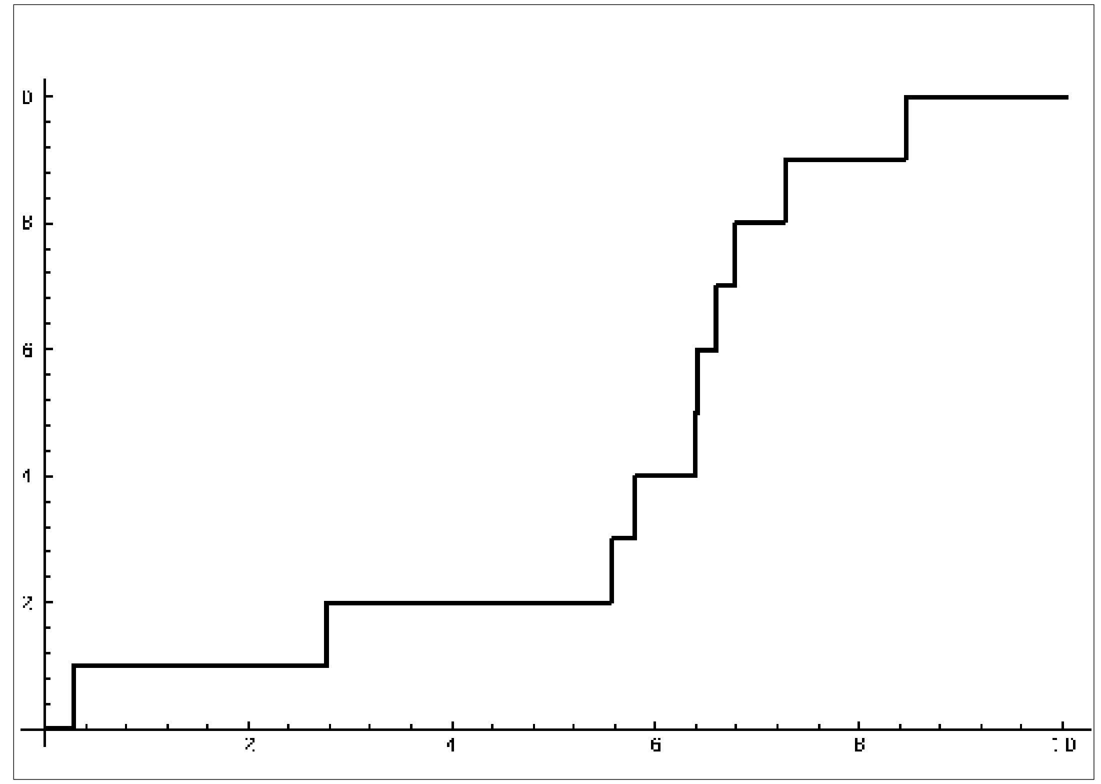

Abb. 3: Poisson-Prozess (als Funktion der Zeit)

Lévy-Prozesse auf dualen Gruppen
Stochastische Unabhängigkeit ist ein fundamentaler Begriff in der Wahrscheinlichkeitstheorie. In der Quantenstochastik gibt es mehrere Unabhängigkeitsbegriffe und für jeden lässt sich eine Theorie von Lévy-Prozessen formulieren. Dies führt zum Begriff der Lévy-Prozesse auf dualen Gruppen, der auch Bestandteil meines Projektes war. Mein Doktorand hat in einem Artikel gezeigt, dass solche Prozesse ganz natürlich als Grenzwert von klassischen Lévy-Prozesse mit Werten in Matrizen auftreten, wenn man die Dimension gegen unendlich gehen lässt.

Anwendungen
Die Klassifizierungsergebnisse haben uns neue Beispiele von Quanten-Lévy-Prozessen geliefert, die wir jetzt genauer untersuchen und deren Anwendungen in der Quantendynamik und der nicht-kommutativen Geometrie ebenfalls von uns weiterentwickelt wird. Aus dem Spektrum der erzeugenden Funktionalen lassen sich, z. B. leicht die spektralen Dimen-

sionen der zugehörigen Dirac-Operatoren berechnen.

Übersichtsartikel und Bücher
Während meines Fellow-Aufenthalts habe ich an einem Übersichtsartikel und zwei Büchern über Quantenstochastik im Allgemeinen und über mein Forschungsgebiet im Speziellen gearbeitet. Mit Nicolas Privault habe ich ein Buch mit dem Titel ``Probability from Algebra, A Functional Calculus Approach to Non-Commuting Random Variables'' geschrieben, das wenig Vorkenntnisse verlangt und sich an Studenten richtet. Mit Adam Skalski habe ich die Vorlesungen einer in 2013 in Bangalore, Indien, abgehaltenen Schule überarbeitet und in Buchform gebracht. Dieses Buch, mit dem Titel ``Noncommutative Mathematics by Example: Quantum Probability and Quantum Dynamical Systems'' richtet sich hauptsächlich an Doktoranden und junge Forscher und soll in der Reihe ``Lecture Notes of the Indian Institut of Sciences'' erscheinen. Beide Manuskripte sind derzeit zur Begutachtung bei Cambridge University Press.
Weiterhin habe ich mit Anna Kula und Adam Skalski an einem Übersichtsartikel über ``Lévy Processes on Quantum Permutation Groups'' gearbeitet. Dieser Artikel soll in den Proceedings der Konferenz ``Noncommutative analysis, operator theory and applications'' (NAOA2014), die im Mai 2014 in Mailand stattfand, erscheinen und richtet sich an Forscher in der Analysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Vorlesung und Seminar
Während meines Fellow-Aufenthalts habe ich eine Vorlesung über Funktionalanalysis mit vier Semesterwochenstunden gehalten und mehrere Vorträge im Forschungsseminar von Professor Dr. Michael Schürmann.

Kooperation
Die Ergebnisse des Projektes werden wir auch auf dem Workshop ``Algebraic and Analytic Aspects of Quantum Lévy Processes'' am Alfried Krupp Wissenschaftskolleg (9. bis zum 13. März 2015, finanziert von der DFG, den Mathematik-Instituten der Universitäten in Greifswald und Besançon und dem Alfried Krupp Wissenschaftskolleg) vorstellen.
In den nächsten zwei Jahren ist die Fortsetzung meines Projektes mit der Arbeitsgruppe durch ein Procope-Projekt ``Algebraic and Analytic Aspects of Quantum Lévy Processes'' (finanziert vom DAAD und CampusFrance) gesichert. Michaël Ulrich wird seine Arbeit an den Lévy-Prozessen auf dualen Gruppen im Rahmen einer ``Cotutelle'' unter der gemeinsamen Betreuung durch Professor Dr. Michael Schürmann und mich fortsetzen, der Abschluss seiner Promotion ist für 2016 geplant.

Ausgewählte Veröffentlichungen

Das, Biswarup; Franz, Uwe; Kula, Anna; Skalski, Ada: One-to-one correspondence between generating functionals and cocycles on quantum groups in the presence of symmetry, Preprint, siehe http://arxiv.org/abs/1410.6944, 2014.

Cipriani, Fabio; Kula, Anna; Franz, Uwe: Symmetries of Lévy processes on compact quantum groups, their Markov semigroups and potential theory, Journal of Functional Analysis, Volume 266, Issue 5, March 2014, Pages 2789–2844.

Franz, Uwe; Kula, Anna; Lindsay, Martin; Skeide, Michael: Hunt's formula for SUq(N) and Uq(N), in Vorbereitung, 2014.

Franz, Uwe; Kula, Anna; Skalski, Adam: Lévy Processes on Quantum Permutation Groups, in Vorbereitung, 2014.

Franz, Uwe; Gerhold, Malte; Thom, Andreas: On the Lévy-Khintchin decomposition, in Vorbereitung, 2014.

Franz, Uwe; Privault, Nicolas: Probability from Algebra, A Functional Calculus Approach to Non-Commuting Random Variables, zur Begutachtung bei Cambridge University Press, 2014.

Franz, Uwe; Skalski, Adam: Noncommutative Mathematics by Example: Quantum Probability and Quantum Dynamical Systems, zur Begutachtung bei den Lecture Notes des Indian Institut of Sciences (Cambridge University Press), 2014.

Schürmann, Michael: Gaussian states on bialgebras. In ``Quantum Probability V,'' Lecture Notes in Math., 1442, 347-367, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

Schürmann, Michael: White Noise on Bialgebras, Lecture Notes in Math., Vol. 1544, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Ulrich, Michaël: Construction of a free Lévy process as high-dimensional limit of a Brownian motion on the Unitary group, Preprint, siehe http://arxiv.org/abs/1407.0212, 2014.